

## Análise teórico-numérica da influência do número de parafusos no comportamento de cantoneiras laminadas comprimidas concêntrica e excentricamente

José Onésimo Gomes Junyor<sup>1\*</sup>, Hermes Carvalho<sup>1</sup>, Armando Cesar Campos Lavall<sup>1</sup>, João Victor Fragoso Dias<sup>1</sup>, Ana Lydia Reis de Castro e Silva<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas – PROPEEs – DEES/EE/UFMG, contato@josegomes.eng.br, hermes@dees.ufmg.br, lavall@dees.ufmg.br, joaovfdias@gmail.com, lydia@dees.ufmg.br

### Resumo

As cantoneiras laminadas de aço axialmente comprimidas estão presentes em sistemas estruturais diversos, sendo muito comuns em estruturas de torres de transmissão. Na maioria das vezes onde se utiliza este tipo de perfil, a solicitação do mesmo ocorre através de uma aba, sendo a ligação parafusada bastante utilizada. A obtenção da solução elástica exata para cantoneiras comprimidas excentricamente é complexa. Vlasov (1962) propôs, para barras comprimidas excentricamente, um sistema de três equações diferenciais, as quais regem o problema da flexotorção considerando a posição deslocada da seção transversal. O presente trabalho teve o objetivo de estudar o comportamento de cantoneiras de abas iguais comprimidas concêntrica e excentricamente. As equações diferenciais propostas por Vlasov (1962) foram aplicadas às cantoneiras comprimidas conectadas por um, dois e três parafusos. Finalmente, uma avaliação do número de parafusos utilizando análises numéricas foi realizada, sendo os resultados comparados posteriormente com as formulações analíticas. Observou-se boa concordância entre os resultados numéricos e analíticos.

**Palavras-chave:** *Compressão concêntrica; Compressão excêntrica; Cantoneiras comprimidas através de uma aba; Flambagem; Capacidade resistente à compressão.*

### Abstract

*Hot-rolled steel single angle sections in compression are used in several systems. In most practical cases, these members are attached to others only by one leg, usually by bolts. It is difficult to obtain the exact elastic solution for angles in eccentric compression. Vlasov (1962) proposed a system of three differential equations for eccentrically compressed bars, which govern the torsional-flexural problem, considering the displaced position of the cross-section. The present work had the objective of studying the behavior of equal-leg angles in concentric and eccentric compression. The differential equations proposed by Vlasov (1962) were applied to angles in compression connected by one, two and three bolts. Finally, numerical models were used to assess the influence of the number of bolts and the results were compared with analytical formulations. Great agreement between the numerical and analytical results was observed.*

**Keywords:** *Concentric compression; Eccentric compression; Angles compressed in one leg; Buckling; Compressive strength.*

\* Autor correspondente

## 1 Introdução

A cantoneira de abas iguais é um perfil metálico de seção em L, composta por duas abas de comprimentos iguais formando 90° entre si. O processo de fabricação das cantoneiras laminadas a quente consiste na laminação de metais/ligas acima da temperatura de recristalização do material. Nesse processo, uma placa ou chapa é reaquecida em fornos, passando em seguida através de grandes cilindros, que a comprimem e a impõe a forma pretendida. Durante o resfriamento do perfil, surge uma distribuição de tensões iniciais autoequilibradas, denominadas de tensões residuais.

As cantoneiras laminadas a quente estão entre os perfis mais utilizados na construção metálica, devido à menor complexidade de fabricação, à elevada eficiência estrutural (relação capacidade resistente/peso) e, principalmente, à versatilidade de conectá-las a outros elementos estruturais. Estes perfis são muito utilizados em estruturas de contraventamentos, sistemas treliçados, e como elementos de ligações entre perfis diversos, sendo muito empregados em sistemas construtivos de edifícios, galpões e, principalmente, em torres de transmissão. Na maioria dos casos práticos, as cantoneiras estão sujeitas principalmente às forças axiais, sendo conectadas aos outros elementos da estrutura através de uma aba apenas, sendo a ligação parafusada a mais frequente (Figura 1.1).

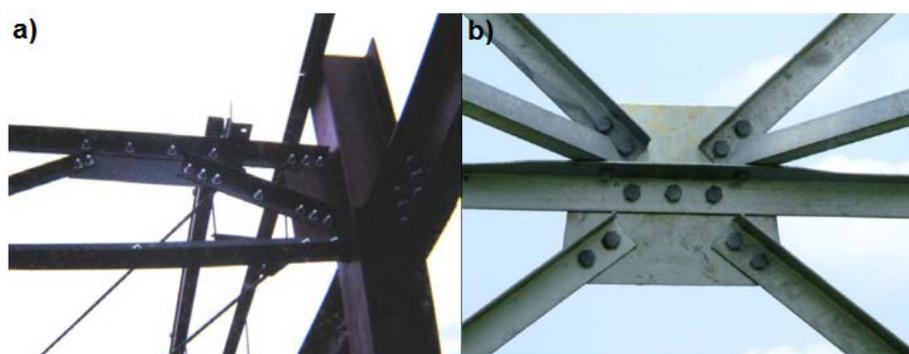


Figura 1.1 - Cantoneiras de abas iguais conectadas através de uma aba via ligação parafusada (a) – Leal, 2011; b) – Bashar, 2012).

Apesar da aparente simplicidade e facilidade de utilização, a análise e dimensionamento de cantoneiras conectadas por uma aba não são simples, devido à excentricidade de aplicação da força normal e à não coincidência dos eixos principais

de inércia da cantoneira com os paralelos aos planos de conexão (planos paralelos às abas). Estudos mostram que a capacidade resistente de cantoneiras submetidas à tração excêntrica não é muito menor do que nas situações de tração concêntrica (Woolcock e Kitipornchai, 1986). Na compressão, o efeito da excentricidade na força última é mais pronunciado, como mostraram Elgaaly *et al.* (1991) e Bathon *et al.* (1993), entre outros autores. Temple e Sakla (1996) citam ainda outro motivo para a complexidade de se analisar e dimensionar cantoneiras comprimidas: a dificuldade de contabilizar a influência da rigidez da fixação da barra na sua capacidade resistente, já que as restrições das extremidades não são conhecidas na maioria dos casos.

De modo geral, as cantoneiras comprimidas apresentam dois modos de falha: instabilidades por flexão e flexotorção. A cantoneira laminada normalmente possui abas compactas ( $b/t < 20$ ), onde  $b$  e  $t$  correspondem, respectivamente, à largura e espessura da aba, não estando portanto sujeitas às instabilidades locais. Nas cantoneiras conectadas através de uma aba por meio de um parafuso apenas, a ligação é considerada rotulada. Quando se utilizam dois parafusos ou mais, a ligação é usualmente denominada semi-engastada (situação intermediária entre rótula e engaste).

Para a faixa de comprimento utilizada em torres de transmissão (barras esbeltas) as cantoneiras estão mais propícias a falharem por instabilidade por flexão. Em outros tipos de construção metálica, onde se empregam geralmente cantoneiras de comprimento curto a intermediário, o modo de instabilidade preponderante é a flexotorção (Kettler *et al.*, 2017).

A obtenção analítica da resposta elástica de cantoneiras comprimidas excêntrica é muito complexa. Vlasov (1962) propôs uma formulação analítica para a flexotorção, baseada no equilíbrio da barra na configuração deformada, porém de difícil solução.

Assim, propõe-se neste trabalho um estudo sobre a compressão concêntrica e excêntrica de cantoneiras laminadas conectadas por um, dois e três parafusos através da formulação de Vlasov (1962) e de modelos numéricos.

## 2 Formulação analítica para determinação da força crítica de instabilidade elástica

Barras submetidas à compressão com seção transversal monossimétrica e assimétrica estão sujeitas à instabilidade por flexotorção. Portanto, as cantoneiras laminadas de abas iguais – objeto de estudo deste trabalho – estão inseridas nesse contexto. O problema da flexotorção no regime elástico, de barras com seção transversal aberta de paredes finas, embora estudado anteriormente por Timoshenko e Gere (1961), foi sistematizado por Vlasov (1962). Na presente seção, apresenta-se a formulação de Vlasov (1962) para obtenção da força crítica de instabilidade elástica para uma seção transversal genérica aberta de paredes finas, com sua posterior aplicação no caso de cantoneiras comprimidas.

Seja então uma barra de seção transversal genérica aberta de paredes finas sujeita à força axial ( $N$ ) e a momentos fletores ( $M_y$  e  $M_z$ ) aplicados nas extremidades conforme Figura 2.1, onde  $CG$  representa o centro geométrico e  $D$ , o centro de torção da seção,  $y$  e  $z$  os eixos principais de inércia da seção transversal e  $x$  o eixo longitudinal, que passam pelo centro geométrico das seções.

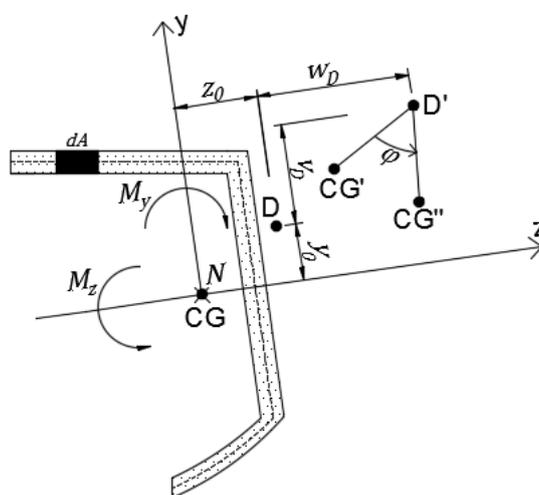


Figura 2.1 – Seção transversal genérica aberta de paredes finas submetida à força axial e momentos fletores em torno dos eixos principais de inércia.

De acordo com Vlasov (1962), quando essa barra for submetida a uma pequena perturbação, capaz de causar a sua instabilidade, ela passará a ocupar uma nova posição de equilíbrio.

No desenvolvimento desta formulação adotam-se, inicialmente, as seguintes hipóteses:

- A espessura do perfil é bem inferior às outras dimensões da seção transversal e essas, por sua vez, são bem menores que o comprimento da barra;
- As seção transversal é indeformável em seu plano, e suas dimensões não variam com  $x$ ;

A segunda hipótese permite que se trate o problema como um movimento de corpo rígido no plano  $yz$ , e assim, a nova posição de equilíbrio da barra pode ser caracterizada por três funções em  $x$ : ângulo de rotação ( $\varphi$ ) e deslocamentos ( $v_D$  e  $w_D$ ) do centro de torção nas direções dos eixos principais ( $y$  e  $z$ , respectivamente) da seção, conforme mostrado na Figura 2.1. A partir dessas funções obtêm-se equações diferenciais, as quais, na maioria das vezes, são de difícil solução exata até mesmo para os casos mais simples de vinculação e carregamento. Na Subseção 2.1 serão deduzidas as equações diferenciais para a seção transversal indicada na Figura 2.1, utilizando o Método do Equilíbrio na sua configuração deformada, com pequenos deslocamentos, rotações e deformações.

## 2.1 Estabilidade de uma barra com seção transversal genérica aberta de paredes finas

Conforme a Figura 2.1, o deslocamento da seção transversal no seu plano pode ser considerado como a superposição de deslocamentos relativos à translação e à rotação. Assim, considerando pequenos deslocamentos, rotações e deformações, obtêm-se as Equações (2.1) e (2.2), as quais expressam os deslocamentos da seção transversal nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente.

$$v = v_D + (z - z_0)\varphi \quad (2.1)$$

$$w = w_D + (y - y_0)\varphi \quad (2.2)$$

onde:

- $\varphi$  o ângulo de rotação;  
 $z_0$  e  $y_0$  as coordenadas do centro de torção ( $D$ );  
 $w_D$  e  $v_D$  os deslocamentos do centro de torção em  $z$  e  $y$ .

Logo,  $v$  e  $w$  são funções de  $v_D(x)$ ,  $w_D(x)$  e  $\varphi(x)$  (ângulo de torção da seção transversal – ver Figura 2.1), e as condições que devem satisfazer essas funções são

expressas por três equações diferenciais dependentes. Para deduzir essas equações, parte-se das equações básicas da flexão (da Resistência dos Materiais) – Equações (2.3) e (2.4) - e da flexotorção (proposta por Vlasov, 1962) – Equação (2.5). Essas equações são válidas quando há eixos de simetria, ou seja, quando o produto de inércia é nulo.

$$EI_z v_D'' = -M_z \quad (2.3)$$

$$EI_y w_D'' = -M_y \quad (2.4)$$

$$EC_w \varphi''' - GJ\varphi' = -M_t \quad (2.5)$$

sendo:

- $I_z$  e  $I_y$  os momentos de inércia relativos aos eixos principais de inércia  $z$  e  $y$ ;  
 $M_z$  e  $M_y$  os momentos fletores relativos aos eixos principais de inércia  $z$  e  $y$ ;  
 $M_t$  o momento de torção;  
 $J$  o momento de inércia à torção uniforme;  
 $E$  e  $G$  os módulos de elasticidade longitudinal e transversal do aço;  
 $C_w$  a constante de empenamento da seção, obtida através da Equação (2.6).

$$C_w = \int_A \omega^2 dA \quad (2.6)$$

Na Equação (2.6),  $\omega$  é a área setorial principal e  $A$  a área da seção transversal.

Derivando as Equações (2.3), (2.4) e (2.5) obtém-se:

$$EI_z v_D^{IV} = CD_y \quad (2.7)$$

$$EI_y w_D^{IV} = CD_z \quad (2.8)$$

$$EC_w \varphi^{IV} - GJ\varphi'' = MTD \quad (2.9)$$

sendo:

- $CD_y$  a força por unidade de comprimento na direção  $y$ ;  
 $CD_z$  a força por unidade de comprimento na direção  $z$ ;  
 $MTD$  o momento torsor por unidade de comprimento.

Estão sendo consideradas apenas forças axiais aplicadas nas extremidades, logo a tensão normal ( $\sigma$ ) é constante ao longo do eixo  $x$  e a tensão de cisalhamento ( $\tau$ ) é nula. O cálculo de  $CD_y$ ,  $CD_z$ , e  $MTD$  são realizados no equilíbrio da posição deformada (considerando pequenos deslocamentos, rotações e deformações). Dessa forma são obtidas as Equações (2.10), (2.11) e (2.12).

$$CD_y = \int_A \sigma v'' dA \quad (2.10)$$

$$CD_z = \int_A \sigma w'' dA \quad (2.11)$$

$$MTD = \int_A \{\sigma w'' [(y - y_0) + (z - z_0)\varphi] - \sigma v'' [(z - z_0) + (y - y_0)\varphi]\} dA \quad (2.12)$$

De acordo com Vlasov (1962), as tensões longitudinais atuantes na barra recebem a contribuição do bimomento ( $B$ ), conforme a Equação (2.13):

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{B}{C_w} \omega \quad (2.13)$$

Segundo Mori (2003), para seções transversais com um eixo de simetria, o bimomento não altera o valor da força crítica de instabilidade, sendo assim, como essas formulações são aplicadas em cantoneiras neste trabalho, despreza-se a contribuição do bimomento nas tensões. Combinando a Equação (2.13) nas Equações (2.10), (2.11) e (2.12), e desenvolvendo essas últimas nas Equações (2.7), (2.8) e (2.9), obtém-se então as equações diferenciais de estabilidade para uma barra de seção transversal genérica aberta de paredes finas:

$$EI_z v_D^{IV} - N v_D'' + (N z_0 - M_y) \varphi'' = 0 \quad (2.14)$$

$$EI_y w_D^{IV} - N w_D'' - (N y_0 - M_z) \varphi'' = 0 \quad (2.15)$$

$$EC_w \varphi^{IV} - [N r_0^2 + 2M_y (k_z - z_0) + 2M_z (k_y - y_0) - GJ] \varphi'' - (M_y - N z_0) v_D'' + (M_z - N y_0) w_D'' = 0 \quad (2.16)$$

sendo  $r_0$  o raio de giração polar em relação ao centro de torção, dado por:

$$r_0^2 = \frac{I_z + I_y}{A} + z_0^2 + y_0^2 \quad (2.17)$$

e  $k_x$  e  $k_y$  são as coordenadas do centro do círculo de estabilidade (coordenadas do ponto de Kindem), calculados através das Equações (2.18) e (2.19), respectivamente. O círculo de estabilidade (ou região de estabilidade) é a região da seção transversal onde é possível aplicar uma força de tração sem provocar a instabilidade da barra e  $k_x$  e  $k_y$  são as coordenadas do centro desse círculo em relação ao centro geométrico da seção.

$$k_y = \frac{1}{2I_z} \int_A y (z^2 + y^2) dA \quad (2.18)$$

$$k_z = \frac{1}{2I_y} \int_A z (z^2 + y^2) dA \quad (2.19)$$

O vínculo de garfo é uma condição de contorno muito comum nos casos práticos de ligações metálicas, onde as extremidades da barra possuem rotação livre em relação aos eixos principais de inércia, empenamento livre e torção da seção transversal

impedida. Ao impor condições de contorno de vínculo de garfo (ver Tabela 2.1) nas extremidades de uma barra comprimida, as soluções das equações diferenciais, quando o carregamento atinge seu valor crítico, são:

$$v_D(x) = A \operatorname{sen} \frac{\pi}{L} x \quad (2.20)$$

$$w_D(x) = B \operatorname{sen} \frac{\pi}{L} x \quad (2.21)$$

$$\varphi(x) = C \operatorname{sen} \frac{\pi}{L} x \quad (2.22)$$

sendo  $A$ ,  $B$ , e  $C$  são constantes numéricas e  $L$  o comprimento da barra.

Tabela 2.1 – Condições de contorno de vínculo de garfo.

Flexão e Rotações	Momentos Fletores e Bimomento
$v_D(0) = v_D(L) = 0$	$v_D''(0) = v_D''(L) = 0$
$w_D(0) = w_D(L) = 0$	$w_D''(0) = w_D''(L) = 0$
$\varphi(0) = \varphi(L) = 0$	$\varphi''(0) = \varphi''(L) = 0$

Combinando as Equações (2.20), (2.21) e (2.22) no sistema de equações diferenciais (Equações (2.14), (2.15) e (2.16)), e generalizando para diversos casos de condições de contorno, chegamos a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{\pi^2 EI_z}{K_z L_z^2} + N \right) & 0 & -(Nz_0 - M_y) \\ 0 & \left( \frac{\pi^2 EI_y}{K_y L_y^2} + N \right) & (Ny_0 - M_z) \\ -(Nz_0 - M_y) & (Ny_0 - M_z) & \begin{bmatrix} \frac{\pi^2 EC_w}{K_x L_x^2} + Nr_0^2 + 2M_y(k_z - z_0) + \\ 2M_z(k_y - y_0) + GJ \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

sendo:

$K_z L_z$  e  $K_y L_y$  os comprimentos efetivos de flambagem em relação aos eixos  $z$  e  $y$ ;

$K_x L_x$  o comprimento efetivo de flambagem por torção devido ao empenamento.

As forças axiais de flambagem elástica por flexão em relação aos eixos  $z$  e  $y$ ,  $N_{zz}$  e  $N_{yy}$ , e a força de flambagem elástica relativa à torção da barra,  $N_{xx}$ , podem ser definidas como:

$$N_{ez} = \frac{\pi^2 EI_z}{(K_z L_z)^2} \quad (2.24)$$

$$N_{ey} = \frac{\pi^2 EI_y}{(K_y L_y)^2} \quad (2.25)$$

$$N_{ex} = \frac{1}{r_0^2} \left[ \frac{\pi^2 EC_w}{(K_x L_x)^2} + GJ \right] \quad (2.26)$$

Na busca por uma solução não trivial para a Equação (2.23), considerando  $N$  uma força de compressão, obtém-se:

$$\begin{vmatrix} (N_{ez} - N) & 0 & -(Nz_0 + M_y) \\ 0 & (N_{ey} - N) & (Ny_0 + M_z) \\ -(Nz_0 + M_y) & (Ny_0 + M_z) & \left[ r_0^2(N_{ex} - N) + 2M_y(k_z - z_0) + 2M_z(k_y - y_0) \right] \end{vmatrix} = 0 \quad (2.27)$$

Essa equação pode ser então reescrita na seguinte forma:

$$(N_{ez} - N)(N_{ey} - N)\{N_{ex}r_0^2 + [-Nr_0^2 + 2M_y(k_z - z_0) + 2M_z(k_y - y_0)]\} - (Nz_0 + M_y)^2(N_{ey} - N) - (Ny_0 + M_z)^2(N_{ez} - N) = 0 \quad (2.28)$$

A Equação (2.28) é uma equação geral, a partir da qual é possível determinar os valores críticos das forças axiais e momentos fletores aplicados às extremidades de um barra.

## 2.2 Estabilidade de Cantoneiras Comprimidas

As cantoneiras laminadas de abas iguais são amplamente utilizadas na construção metálica devido às suas facilidades de conexão. Essa, por sua vez, é a principal responsável pela compressão excêntrica a qual essas barras estão submetidas. Neste trabalho, a excentricidade a ser avaliada está relacionada ao uso de cantoneiras conectadas por parafusos em uma das abas, conforme Figura 2.2. Nessa figura, os eixos  $z$  e  $y$  são os eixos de menor e maior inércia da seção, respectivamente,  $b$  é a largura da aba e  $t$  a espessura. A orientação dos eixos mostradas na Figura 2.2 é utilizada como referência em todo o trabalho.

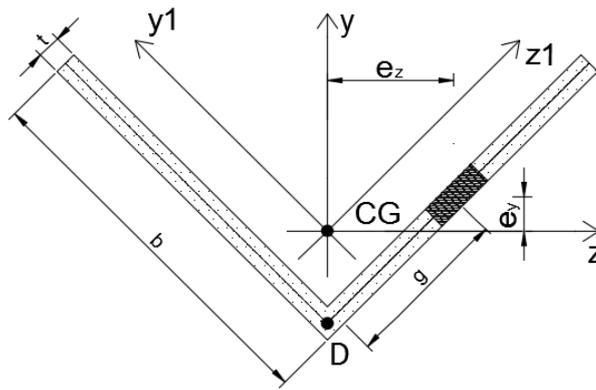


Figura 2.2 – Cantoneira de abas iguais parafusada por uma aba.

De acordo com a Teoria de Vlasov (1962), se uma barra com seção transversal monossimétrica for submetida à uma força de compressão excêntrica – caso da Figura 2.2 – os autovetores são relativos a movimentos característicos de flexotorção.

A obtenção da solução elástica exata para cantoneiras comprimidas excêntrica pode ser realizada substituindo os momentos fletores da Equação (2.28) por:

$$M_y = Ne_z \quad (2.29)$$

$$M_z = -Ne_y \quad (2.30)$$

sendo  $e_z$  e  $e_y$  as coordenadas de aplicação de  $N$ , calculadas em função do gabarito da furação ( $g$ ):

$$e_y = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( g - \frac{b}{2} \right) \quad (2.31)$$

$$e_z = \frac{\sqrt{2}}{2} g \quad (2.32)$$

A cantoneira pertence a um grupo de perfis em que suas ramificações são coincidentes em um ponto, bem como a seção cruciforme e a seção T, o que lhe confere certas peculiaridades. O centro de torção ( $D$ ) da cantoneira está localizado no encontro das abas, o que a concede baixa rigidez à torção e coeficiente de empenamento,  $C_w$ , nulo (ver Equação (2.6)). Tal fato aumenta a susceptibilidade do perfil a ser mais susceptível a sofrer instabilidade por flexotorção. Assim, a primeira expressão da Equação (2.26) desaparece, e a força axial de flambagem por torção puramente da cantoneira pode ser dada por:

$$N_{ex} = \frac{GJ}{r_0^2} \quad (2.33)$$

Além disso, devido à simetria em torno do eixo de maior inércia ( $y$ ),  $z_0$  e  $k_z$  são nulos.

A constante  $k_y$  pode ser obtida através da expressão:

$$k_y = \frac{\sqrt{2}t}{I_z} \left( 0,125b^4 - \frac{\sqrt{2}}{3}y_0b^3 + 0,75y_0^2b^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_0^3b \right) \quad (2.34)$$

Diante dessas definições, a Equação (2.28) pode ser reescrita para cantoneiras comprimidas excêntrica, conforme a Equação (2.35):

$$(N_{zz} - N)(N_{yy} - N)[N_{zz}r_0^2 - N[r_0^2 + 2e_y(k_y - y_0)]] - N^2e_z^2(N_{yy} - N) - N^2(e_y - y_0)^2(N_{zz} - N) = 0 \quad (2.35)$$

sendo  $N_{zz}$  e  $N_{yy}$  calculados através das Equações (2.24) e (2.25), respectivamente. A Equação (2.35) fornece 3 soluções possíveis. A força crítica de instabilidade à compressão,  $N_{cr}$ , é a menor das raízes positivas.

### 3 Análise Numérica

As análises numéricas deste trabalho foram realizadas com base no Método dos Elementos Finitos, através da plataforma computacional ANSYS v.15.0. As análises iniciais foram desenvolvidas para os modelos sob compressão concêntrica, a partir dos quais foram calibrados, através de formulações analíticas, todos os parâmetros da modelagem para posterior análise dos mesmos perfis sob compressão excêntrica.

Para compor os perfis, foi utilizado o elemento SHELL181, elemento disponível na biblioteca do ANSYS e adequado para análises não lineares de cascas de parede fina sujeitas a grandes gradientes de deformação e rotação. No modelo, a cantoneira foi modelada a partir do plano médio das abas sem a presença dos parafusos nas extremidades. A presença deste último foi simulada através de furos (Figura 3.1a). Os furos foram modelados com elementos MPC184. Este elemento pode ser utilizado como um componente rígido na transmissão de forças usado para transmitir forças e momentos, sendo útil para simular situações de condições cinemáticas simples como a imposição de deslocamentos iguais entre duas partes ou até mais complicadas como o contato entre dois corpos flexíveis. Utilizou-se uma malha quadrangular em quase todo o perfil, exceto na ligação, onde os elementos foram distorcidos, produzindo uma malha circular ao redor dos furos (Figura 3.1a). Para otimizar o processamento computacional, foi utilizada a propriedade de simetria, onde apenas o metade do

comprimento original da cantoneira foi discretizado (Figura 3.1b). Nesta modelagem, a região de interseção entre as abas foi modelada com canto reto (sem curvatura), uma vez que essa curvatura apresenta pouca influência na capacidade resistente dos perfis (Liu e Hui, 2010).

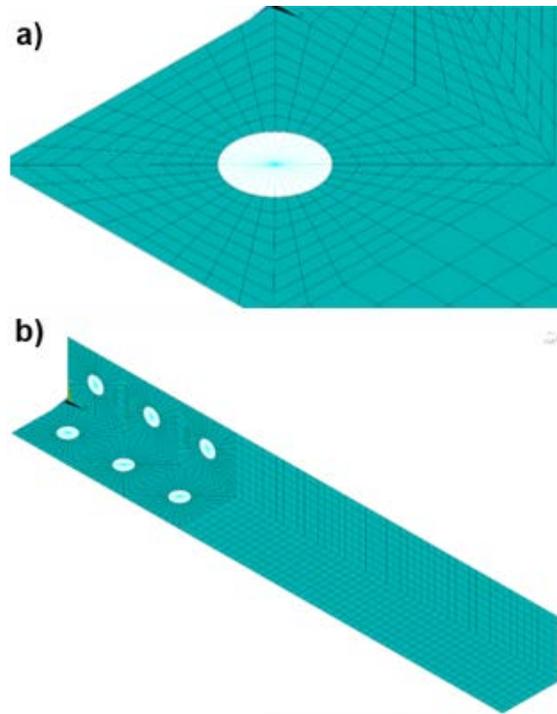


Figura 3.1 – Extremidades das cantoneiras e malha adotada nos modelos numéricos.

Como condições de contorno, foram aplicados vínculos de garfo nas extremidades das barras. Para isso, foram aplicadas restrições nos nós centrais dos furos, as mesmas mostradas na Tabela 3.1 e nas Figuras 3.2a e 3.2b. A solicitação também foi aplicada nesses nós. Para introduzir o efeito de simetria, adotaram-se as restrições nos graus de liberdade de translação em  $x$  e rotação em  $y$  e  $z$  ( $U_x$ ,  $ROT_y$  e  $ROT_z$ ) em todos os nós da seção transversal correspondente à simetria (Figura 3.2c).

Tabela 3.1 – Restrições adotadas nos nós centrais dos furos.

<b>Tipo de solicitação</b>	<b>Graus de liberdade restringidos</b>
Concêntrica	$U_y, U_z$
Excêntrica	$U_y, U_z, ROT_x$

\* $U_x, U_y$  e  $U_z$  são graus de liberdade de translação, e  $ROT_x, ROT_y$  e  $ROT_z$  são graus de liberdade de rotação.

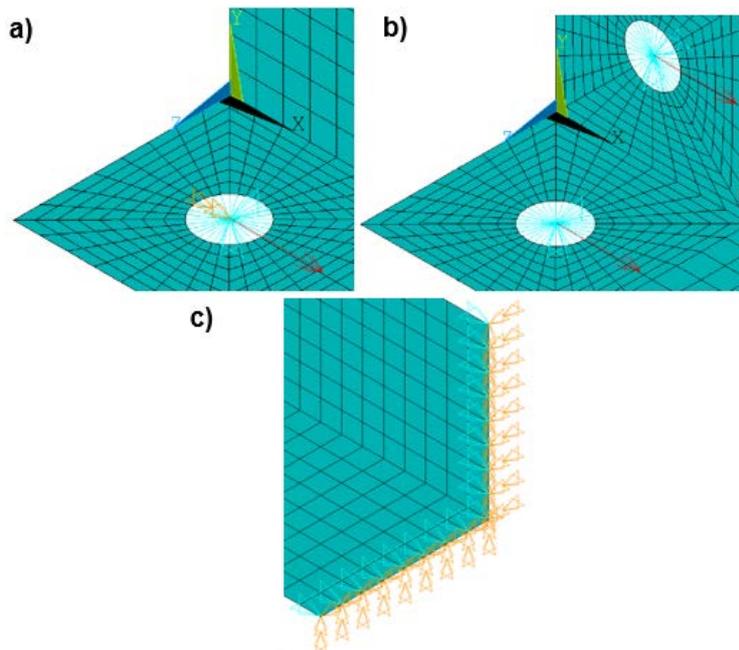


Figura 3.2 – Condições de contorno e carregamentos aplicados na: a) compressão concêntrica; b) compressão excêntrica; c) seção transversal de simetria.

Para a obtenção da capacidade resistente das barras, primeiramente, foi realizada uma análise de instabilidade elástica (análise linearizada de estabilidade). Em seguida, uma análise não linear geométrica e de material foi realizada, onde, através de métodos iterativos (Controle por comprimento de arco), o carregamento foi acrescentado à estrutura, passando pela força última, até a parada da solução, caracterizada pela não convergência da análise (ver Figura 3.3). Utilizou-se o critério de falha de von Mises.

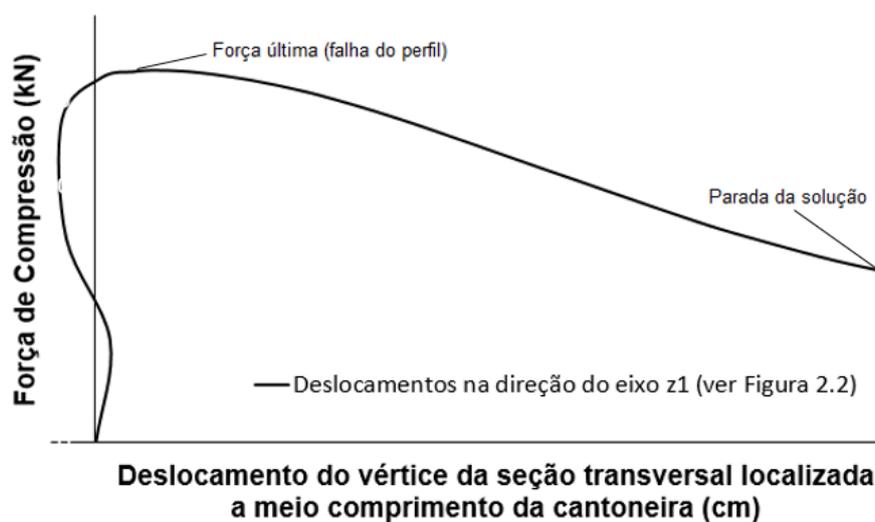


Figura 3.3 – Curva Força x deslocamento de uma cantoneira comprimida excêntrica.

Para o modelo constitutivo dos perfis, adotou-se o diagrama bilinear elastoplástico perfeito, com material de referência o aço carbono ASTM A36, cuja resistência ao escoamento é igual a 25 kN/cm<sup>2</sup>.

É bastante difundido na literatura que a imperfeição geométrica inicial leva a variações elevadas da capacidade resistente em barras comprimidas concêntricas. Enquanto nas cantoneiras comprimidas excêntricas, o efeito das imperfeições geométricas é muito pequeno se comparado ao efeito da excentricidade de aplicação da força normal. Sakla (1997) em seus estudos sobre compressão de cantoneiras soldadas por uma aba observou que os efeitos das imperfeições geométricas iniciais não foram relevantes. Liu e Hui (2010) avaliaram a influência de vários valores de excentricidade em torno dos eixos de maior e de menor inércia na capacidade resistente de cantoneiras. Concluíram que a imperfeição geométrica teve efeito desprezível na compressão excêntrica, enquanto que na compressão concêntrica, o valor da capacidade resistente decresce a medida que a imperfeição aumenta. No caso das tensões residuais, sabe-se da literatura que as mesmas possuem pouca influência na capacidade resistente de cantoneiras comprimidas. Elgaaly *et al.* (1991) verificaram que o impacto das tensões residuais na capacidade última de cantoneiras comprimidas era desprezível, sendo menor ou igual a 5%. Usami e Galambos (1971) concluíram em seus estudos sobre compressão excêntrica de cantoneiras que os efeitos das tensões residuais eram insignificantes na capacidade resistente e que a presença das tensões residuais reduzia esses valores em no máximo em 4%. Para o estudo numérico deste trabalho não foram consideradas tensões residuais e imperfeições geométricas iniciais.

O estudo numérico foi desenvolvido para a cantoneira L 63,5 x 6,4 mm (ver Tabela 3.2), sendo avaliados comprimentos diversos; permitindo obter esbeltezes (relativas ao eixo de menor inércia) variando entre 25 a 500, com incrementos de 25.

A esbeltez dos modelos deste trabalho é expressa por  $\lambda_r$ , índice de esbeltez relativo ao eixo de menor inércia, calculado através da Equação (3.1):

$$\lambda_r = \frac{L_r}{r} \quad (3.1)$$

onde  $L_r$  é a distância entre as duas extremidades da cantoneira, medida a partir dos parafusos mais próximos às bordas transversais, e  $r$ , o raio de giração em relação ao eixo de menor inércia.

Tabela 3.2 – Cantoneira adotada na modelagem numérica.

Perfil	$A_g$ (cm <sup>2</sup> )	$I_z$ (cm <sup>4</sup> )	$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	$r_z$ (cm)	$r_y$ (cm)
L 63,5 x 6,4 mm	7,67	11,79	46,21	1,24	2,45

#### 4 Comparação entre os resultados numéricos e a formulação de Vlasov (1962)

Compararam-se os resultados da análise linearizada de estabilidade (ALE) e da análise não linear geométrica e de material (NLGM) com os valores obtidos através da fórmula de Euler e da formulação de Vlasov (1962). Calcularam-se os valores das tensões relativas à flambagem elástica por flexão em torno do eixo de menor inércia (a partir da equação de Euler – Equação (2.24)) para compressão concêntrica e as tensões referentes à instabilidade por flexotorção (a partir das formulações de Vlasov (1962) – Equação (2.36)) para compressão excêntrica. Nesses cálculos, foram consideradas duas condições de contorno nas extremidades da cantoneira: rótula ( $K = 1,0$ ) e engaste ( $K = 0,5$ ) na fórmula de Euler, e vínculo de garfo e engaste na formulação de Vlasov (1962). A solução para essa última condição de contorno foi obtida assumindo  $K = 0,5$  nas Equações (2.24) e (2.25), e introduzindo os novos valores de  $N_{zz}$  e  $N_{zy}$  na Equação (2.36). A título de referência, a tensão relativa à flambagem por torção pura para o perfil em questão é igual a 87,12 kN/cm<sup>2</sup>.

##### 4.1 Compressão Concêntrica

O comportamento dos modelos numéricos apresentaram excelente concordância com as formulações analíticas para a cantoneira analisada, como pode ser observado na Figura 4.1.

Na compressão concêntrica (Figura 4.1), as cantoneiras com apenas um parafuso comportam-se como barras rotuladas. Observou-se a coincidência entre a formulação de Euler e os resultados da análise linearizada de estabilidade para barras com um e dois parafusos, indicando que a flambagem por flexão em torno do eixo de menor inércia é a única instabilidade que ocorre em perfis de abas compactas sob essa

solicitação. Quanto à utilização de um ou dois parafusos, foi possível observar que o aumento do número de parafusos torna a ligação mais rígida, dando-lhe um efeito de engastamento, possibilitando um esforço resistente cerca de quatro vezes maior do que nas barras com apenas um parafuso. Não foi observada diferença na capacidade resistente com o aumento de dois para três parafusos. Para barras curtas, ou seja, esbeltezes ( $\lambda_r$ ) inferiores a 85, para barras com um parafuso, e a 185, para situações com dois ou três parafusos, ocorreu a plastificação em praticamente todo o perfil, enquanto nas barras mais esbeltas, a flambagem elástica por flexão em torno do eixo de menor inércia foi o estado limite preponderante (ver curvas NLGM da Figura 4.1).

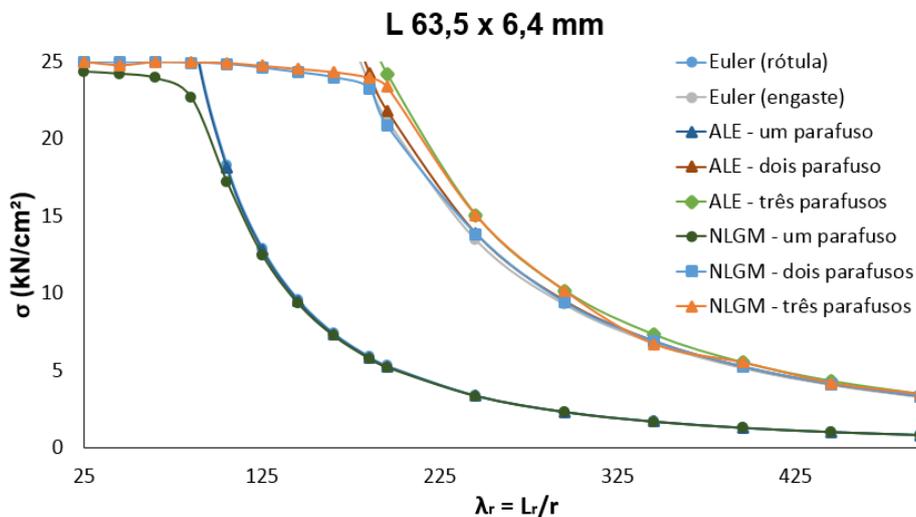


Figura 4.1 – Resultados da análise linearizada de estabilidade e da análise não linear geométrica e de material para compressão concêntrica do perfil L 63,5 x 6,4 mm.

## 4.2 Compressão Excêntrica

Na compressão excêntrica (Figura 4.2), foi observada boa concordância entre os resultados das análises linearizadas de estabilidade e os resultados obtidos através da formulação de Vlasov (1962). A Figura 4.3 apresenta as tensões de von Mises relativas à falha do perfil, típicas de cantoneiras compactas (Figura 4.3a) e esbeltas (Figura 4.3b). Para barras com um parafuso e valores de esbeltezes ( $\lambda_r$ ) abaixo de 145 e para barras com três parafusos com esbeltezes inferiores a 295, a capacidade resistente é caracterizada por plastificação da seção transversal. Na Figura 4.3a observa-se que esses perfis apresentaram plastificação em apenas parte da seção transversal, consequência direta da compressão excêntrica. Para esbeltezes maiores que as destacadas anteriormente, a flambagem elástica por flexão em torno do eixo de

menor inércia governa o modo de falha (ver Figura 4.3b). O comportamento esperado nas cantoneiras comprimidas excêntrica é a flexo-torção da seção transversal. No entanto, observou-se nos modelos numéricos a configuração deformada esquematizada na Figura 4.4a, onde houve predominantemente a flexão em torno do eixo de menor inércia com um pequeno giro da seção transversal. A Figura 4.4b exemplifica isso, onde se observa que as abas da seção transversal localizada a meia altura da cantoneira não são paralelas as abas da seção transversal da extremidade (seção transversal indeformada devido às condições de contorno impostas no modelo numérico), evidenciando, dessa forma, uma rotação da primeira. Observou-se que os deslocamentos devido à torção da seção transversal diminuía à medida que se aumentava a esbelteza das barras. Esse efeito reduzido da torção no comportamento de cantoneiras comprimidas também foi observado por Liang *et al.* (2019) em seus estudos experimentais.

Nas barras com dois parafusos, a plastificação da seção transversal foi preponderante para todas as esbeltezes.

Quanto à influência do número de parafusos, foi observado um ganho no esforço resistente de 90% e 145% nos modelos com dois e três parafusos, respectivamente, quando comparados com o modelo com um parafuso. A diferença da capacidade resistente entre elementos com dois e três parafusos é bem mais significativa do que na compressão concêntrica. É válido notar que, para esbeltezes elevadas, as curvas “NLGM – dois parafusos” e “NLGM – três parafusos” apresentam comportamento assintótico com a curva “Vlasov (Engaste)”, sugerindo um engastamento das extremidades. A tendência de cantoneiras de esbeltezes elevadas comprimidas excêntrica de se comportarem como barras birrotuladas, quando conectadas por um parafuso, e como barras biengastadas, quando conectadas por dois ou mais parafusos, observada na Figura 4.2, também foi verificada por Kettler *et al.* (2019) em suas análises experimentais em cantoneiras comprimidas.

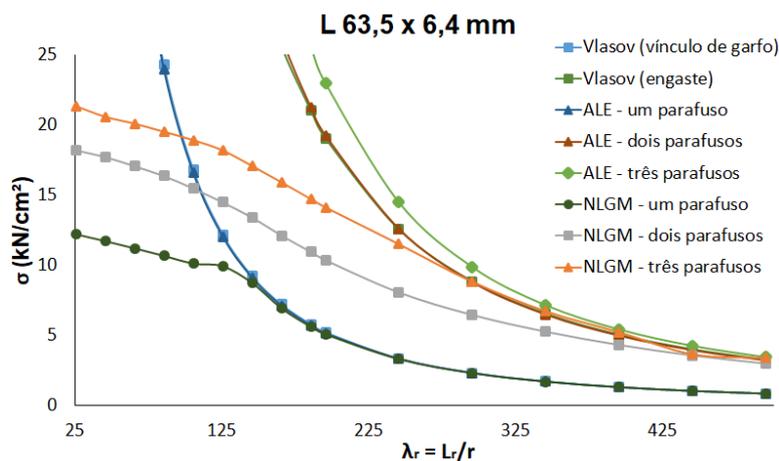


Figura 4.2 – Resultados da análise linearizada de estabilidade e da análise não linear geométrica e de material para compressão excêntrica do perfil L 63,5 x 6,4 mm.

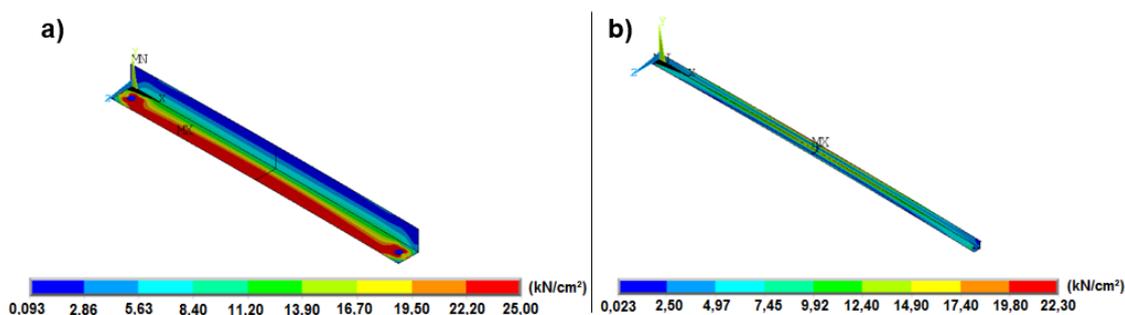


Figura 4.3 – Distribuição de Tensões de von Mises relativa à falha para a compressão excêntrica – L 63,5 x 63,5 mm com um parafusos: a)  $\lambda_r = 65$  e b)  $\lambda_r = 245$ .

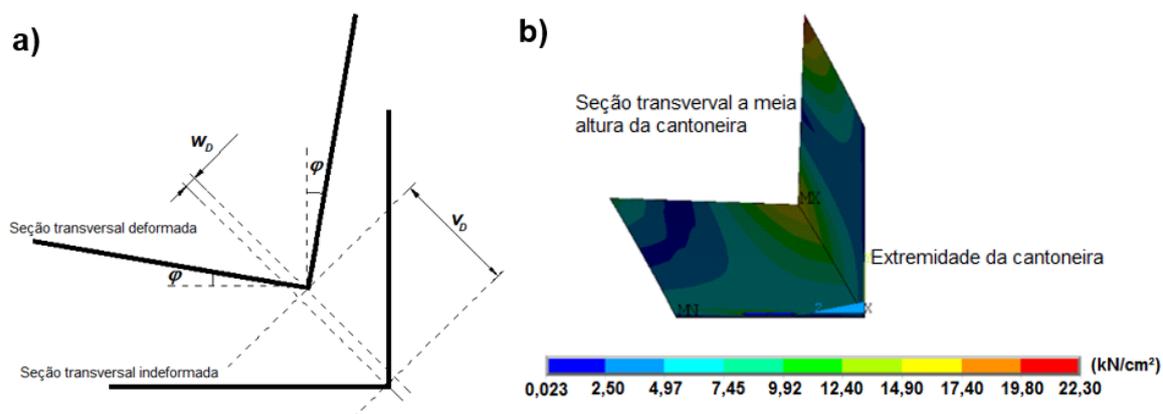


Figura 4.4 – Desenho esquemático da configuração indeformada e deformada; b) Distribuição de Tensões de von Mises relativa à falha para a compressão excêntrica – L 63,5 x 63,5 mm –  $\lambda_r = 245$ .

## 5 Conclusões

### a) Compressão concêntrica:

- as cantoneiras com apenas um parafuso comportam-se como barras birrotuladas. As cantoneiras com dois e três parafusos comportam-se como barras biengastadas, possibilitando uma capacidade resistente cerca de quatro vezes maior do que as barras com apenas um parafuso;
- observou-se a coincidência entre a formulação de Euler e os resultados da análise linearizada de estabilidade para barras com um, dois e três parafusos, indicando que a flambagem em torno do eixo de menor inércia é a único modo de instabilidade que ocorre em perfis de abas compactas sob essa solicitação;
- não foi observada diferença na capacidade resistente com o aumento de dois para três parafusos;

### b) Compressão excêntrica:

- há excelente concordância entre os resultados analíticos obtidos através da formulação de Vlasov (1962) e os resultados numéricos das análises linearizadas de estabilidade. Para esbeltezes elevadas, as cantoneiras comprimidas excêntrica através de um parafuso comportam-se como barras rotuladas, e aquelas solicitadas com dois e três parafusos, como barras biengastadas;
- a resistência máxima alcançada nos modelos com um parafuso corresponde à aproximadamente 50% da resistência ao escoamento, indicando que nesses perfis ocorre, predominantemente, a plastificação apenas da aba conectada. A resistência máxima alcançada nos modelos com dois e três parafusos corresponde à aproximadamente 75 e 95%, respectivamente, da resistência ao escoamento;
- no trecho elastoplástico das curvas, a diferença na capacidade resistente em função do número de parafusos ocorre porque cada parafuso adicional permite que uma maior porção da aba não conectada seja solicitada, fornecendo, dessa forma, um ganho na capacidade resistente.

## 6 Referências

- BASHAR, Iftesham. *Ultimate Capacity of Steel Angles Subjected to Eccentric Compressive Load*. 2012. 125 f. Dissertação (Mestrado) - Engenharia de Estruturas, Bangladesh University Of Engineering And Technology, Dhaka, 2012.
- BATHON, L., MUELLER III, W. H., KEMPNER JR., L. Ultimate Load Capacity of Single Steel Angles. *Journal of Structural Engineering*, v. 119, n. 1, p. 279-300, 1993.
- ELGAALY, M., DAGHER, H., DAVIDS, H. Behavior of single-angle-compression members. *Journal of Structural Engineering*, v. 117, n. 12, p. 3720-3741, 1991.
- KETTLER, M.; LICHTL, G.; UNTERWEGER, H.. Experimental tests on bolted steel angles in compression with varying end supports. *Journal Of Constructional Steel Research*, [s.l.], v. 155, p.301-315, abr. 2019. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcsr.2018.12.030>.
- KETTLER, M.; TARAS, A.; UNTERWEGER, H.. Member capacity of bolted steel angles in compression – Influence of realistic end supports. *Journal Of Constructional Steel Research*, [s.l.], v. 130, p.22-35, mar. 2017. ElsevierBV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcsr.2016.11.021>.
- LEAL, D. F. (2011). *Sobre perfis de aço formados a frio compostos por dupla cantoneira com seção em “T” submetidos à compressão*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.
- LIANG, Y. et al. Flexural-torsional buckling behaviour of fixed-ended hot-rolled austenitic stainless steel equal-leg angle section columns. *Journal Of Constructional Steel Research*, [s.l.], v. 154, p.43-54, mar. 2019. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcsr.2018.11.019>.
- LIU, Yi; HUI, Linbo. Finite element study of steel single angle beam–columns. *Engineering Structures*, [s.l.], v. 32, n. 8, p.2087-2095, ago. 2010. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.03.009>.
- MORI, Dagoberto Dario. *Flexo-Torção: Barras com Seção Transversal Aberta e Paredes Delgadas*. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, 2003.
- SAKLA, S. S. S.. *Single-Angle Compression Members Welded by one Leg to Gusset Plates*. 1997. 340 f. Tese (Doutorado) – Ciência Aplicada, Universidade de Windsor, Windsor, 1997.
- TEMPLE, M. C.; SAKLA, Sherief S.s.. Considerations for the design of single-angle compression members attached by one leg. *Can. J. Civ. Eng*, Windsor, v. 23, p.287-294, jun. 1996.
- TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.M. *Theory of elastic stability*. 2 ed. McGraw W-Hill Kogakusha, LTD., 1961. 541 p.
- USAMI, T.; GALAMBOS, T.V. Eccentrically loaded single angle columns. *International Association for Bridge and Structural Engineering*, Zurich, p. 153 – 183, 1971.
- VLASOV, V.Z. *Pieces Longues en Voiles Minces*. 10. ed. Trad. de G. Smirnoff. Paris, Eyrolles, 1962.
- WOOLCOCK, S.T., KITIPORNCHAI, S. Design of single angle web struts in trusses. *Journal of Structural Engineering*, v. 112, n. 6, p. 1327-1345, 1986.